2^{η} δεκάδα θεμάτων επανάληψης

11 .

Έστω η εξίσωση $x^2 + 2(\lambda + 2)x + 8\lambda = 0$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πότε οι ρίζες είναι ίσες και πότε άνισες;

ii) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $x_1 + x_2 + (x_1x_2)^2 = 30(\lambda + 2)$

iii) Για ποια τιμή του λ οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίθετες;

Λύση

i)

$$\Delta = 4(\lambda + 2)^2 - 32\lambda = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 =$$

$$= (2\lambda - 4)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Οι ρίζες είναι ίσες όταν $\Delta = 0$ δηλαδή όταν $\lambda = 2$

και άνισες όταν

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$

ii)

Από τους τύπους του Vieta έχουμε ότι

$x_1 + x_2 = -2(\lambda + 2)$ και $x_1x_2 = 8\lambda$ επομένως

$x_1 + x_2 + (x_1x_2)^2 = 30(\lambda + 2) \Leftrightarrow$

$-2(\lambda + 2) + 64\lambda^2 = 30(\lambda + 2) \Leftrightarrow$

$2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ ή $\lambda = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$

iii)

Οι ρίζες x_1 , x_2 είναι αντίθετες όταν

$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -2(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$

12.

Σε μία ακολουθία (α_ν) για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $\alpha_\nu = 4 - 5\nu$

i) Δείξτε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος της οποίας βρείτε α_1 και ω

ii) Να βρείτε ποιος όρος της είναι ίσος με -306

iii) Να βρείτε το άθροισμα των όρων από τον 5^o έως και τον 30^o

Λύση

i)

$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 4 - 5(\nu + 1) - 4 + 5\nu = -5$

Άρα η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με

$\omega = -5$ και $\alpha_1 = 4 - 5 = -1$

ii)

$\alpha_\nu = -306 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = -306 \quad \Leftrightarrow$

$-1 + (\nu - 1)(-5) = -306 \quad \Leftrightarrow$

$\nu = 62$ οπότε ο

$\alpha_{62} = -306$

iii)

$S = S_{30} - S_4 =$

$$= \frac{[2\alpha_1 + (30-1)\omega]30}{2} - \frac{[2\alpha_1 + (4-1)\omega]4}{2} =$$

$$= \frac{[2\cdot(-1) + 29\cdot(-5)]30}{2} - \frac{[2\cdot(-1) + 3\cdot(-5)]4}{2} = -2171$$

13.

Κάποιος έχει την δυνατότητα να βάλει υποψηφιότητα για πρόεδρος σε δύο συλλόγους Σ_1 και Σ_2 .

Έστω τα ενδεχόμενα

Α: Εκλέγεται πρόεδρος στον Σ_1

Β: Εκλέγεται πρόεδρος στον Σ_2

Αν η πιθανότητα να εκλεγεί πρόεδρος στον Σ_1 είναι $\frac{1}{4}$,

να μην εκλεγεί στον Σ_2 είναι $\frac{2}{3}$ και

να μην εκλεγεί συγχρόνως και σους δύο συλλόγους είναι $\frac{5}{6}$,

να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων

i) Εκλέγεται στον Σ_1

ii) Εκλέγεται στον Σ_2

iii) Εκλέγεται και στους δύο συλλόγους

iv) Εκλέγεται σ' έναν τουλάχιστον σύλλογο

v) Δεν εκλέγεται σε κανέναν

vi) Εκλέγεται σε έναν μόνο σύλλογο

vii) Το πολύ σε έναν σύλλογο εκλέγεται

Λύση

i)

$$P(\Sigma_1) = \frac{1}{4}$$

ii)

$$P(\Sigma_2) = 1 - P(\Sigma'_2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

iii)

$$P(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 1 - P(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)' = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

iv)

$$P(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = P(\Sigma_1) + P(\Sigma_2) - P(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

v)

$$P(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)' = 1 - P(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

vi)

$$P[(\Sigma_1 - \Sigma_2) \cup (\Sigma_2 - \Sigma_1)] = P(\Sigma_1) + P(\Sigma_2) - 2P(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) =$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

vii)

Το ενδεχόμενο : Το πολύ σε έναν σύλλογο εκλέγεται είναι το

$(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)'$ άρα $P(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)' = \dfrac{5}{6}$

14.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 4| + |x - 2|$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες

ii) Αν A είναι το σημείο τομής της C_f με τον άξονα των x , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το A και έχει κλίση 4

iii) Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε η ευθεία (ε) να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = (\mu^2 - 5\mu + 10)x - 1$

Λύση

i)

Σημεία τομής με τον άξονα x΄x

$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4| + |x - 2| = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 - 4 = 0 \text{ και } x - 2 = 0) \Leftrightarrow x = 2$ επομένως

σημείο τομής με τον άξονα των x είναι το A (2 , 0)

Σημείο τομής με τον άξονα των y

Αφού f(0) = 6 το σημείο τομής με τον άξονα των y είναι το B (0 , 6)

ii)

Η ζητούμενη ευθεία αφού έχει κλίση 4 θα έχει εξίσωση της μορφής

$y = 4x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το A (2 , 0) ακόμα θα ισχύει

$0 = 8 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$ οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$y = 4x - 8$

iii)

Θα πρέπει να ισχύει

$\mu^2 - 5\mu + 10 = 4 \Leftrightarrow \mu^2 - 5\mu + 6 = 0 \Leftrightarrow \mu = 2$ ή $\mu = 3$

15.

Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του $5^{ου}$ και του $12^{ου}$ όρων της είναι 49 ενώ το άθροισμα του $6^{ου}$ και του $8^{ου}$ είναι 40

i) Να ορίσετε την πρόοδο

ii) Να βρείτε το S_{10}

iii) Να βρείτε το άθροισμα των όρων της που είναι μεταξύ $15^{ου}$ και του $28^{ου}$ όρων της

Λύση

i)

Έχουμε ότι

$$\begin{cases} \alpha_5 + \alpha_{12} = 49 \\ \alpha_6 + \alpha_8 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega + \alpha_1 + 11\omega = 49 \\ \alpha_1 + 5\omega + \alpha_1 + 7\omega = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 15\omega = 49 \\ 2\alpha_1 + 12\omega = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις βρίσκουμε

$\omega = 3$

οπότε η

$2\alpha_1 + 15\omega = 49 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = 2$

ii)

$$S_{10} = \frac{[2\alpha_1 + (10-1)\omega]\cdot 10}{2} =$$

$$= \frac{[2\cdot 2 + 9\cdot 3]\cdot 10}{2} = 155$$

iii)

Είναι φανερό ότι ζητάμε το άθροισμα

$$\alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{27}$$

Το άθροισμα αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε με δύο τρόπους

$1^{ος}$ τρόπος

Έχουμε ότι

$\alpha_{16} = \alpha_1 + 15\omega = 2 + 45 = 47$

επομένως το παραπάνω άθροισμα είναι το άθροισμα των δώδεκα πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο 47 και διαφορά ω =3 οπότε το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$S = \frac{[2\cdot 47 + 11\cdot 3]\cdot 12}{2} = 762$$

$2^{ος}$ τρόπος

Από την σχέση

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \ldots + \alpha_{27}$$

Καταλαβαίνουμε ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι ίσο με

$S = S_{27} - S_{15} =$

$$= \frac{[2\alpha_1 + 26\omega]\cdot 27}{2} - \frac{[2\alpha_1 + 14\omega]\cdot 15}{2} =$$

$$= \frac{(4+78)\cdot 27}{2} - \frac{(4+42)\cdot 15}{2} = 762$$

16 .

Έστω η εξίσωση $x^2 + x - k^2 = 0$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $k \in \mathbb{R}$

ii) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να προσδιορίσετε τις τιμές του k για τις οποίες ισχύει

$x_1(k + x_2) + kx_2 > -6$

iii) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού της οποίας ρίζες να είναι οι αριθμοί

$\rho_1 = x_1 + 1$ και $\rho_2 = x_2 + 1$

Λύση

i)

$\Delta = 1 + 4k^2 > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

επομένως η εξίσωση έχει πάντα ρίζες πραγματικές και άνισες

ii)

$x_1(k + x_2) + kx_2 > -6 \Leftrightarrow$

$kx_1 + x_1x_2 + kx_2 > -6 \quad \Leftrightarrow$

$k(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 6 > 0$ **(1)** όμως

$x_1 + x_2 = -1$ και $x_1x_2 = -k^2$ οπότε η **(1)** γίνεται

$-k^2 - k + 6 > 0$

Οι ρίζες του τριώνυμου $-k^2 - k + 6$ είναι οι 2 και -3 και το πρόσημο του φαίνεται παρακάτω

k	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $-k^2 - k + 6 > 0 \Leftrightarrow -3 < k < 2$

iii)

$S = \rho_1 + \rho_2 = x_1 + 1 + x_2 + 1 =$

$= x_1 + x_2 + 2 = -1 + 2 = 1$ και

$P = \rho_1 \cdot \rho_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) =$

$= x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = -k^2 - 1 + 1 = -k^2$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - k^2 = 0$

17.

i) Αν $3 < x < 5$ Να απλοποιηθεί η παράσταση

$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25}$

ii) Αν $2 < \alpha < 8$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών περιέχεται η παράσταση

$B = 5|\alpha - 1| - 3|\alpha - 9| + 4|\alpha + 2| + 5\,|10 - \alpha|$

Λύση

i)

$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} =$

$= \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2} =$

$= |x - 2| + |x - 5|$

όμως

$3 < x < 5 \Leftrightarrow 1 < x - 2 < 3$ άρα $|x - 2| = x - 2$

και

$3 < x < 5 \Leftrightarrow -2 < x - 5 < 0$ άρα $|x - 5| = -x + 5$ οπότε

$A = (x - 2) + (-x + 5) = 3$

ii)

$2 < \alpha < 8 \Leftrightarrow 1 < \alpha - 1 < 7$ άρα $|\alpha - 1| = \alpha - 1$

$2 < \alpha < 8 \Leftrightarrow -7 < \alpha - 9 < -1$ άρα $|\alpha - 9| = -\alpha + 9$

$2 < \alpha < 8 \Leftrightarrow 4 < \alpha + 2 < 10$ άρα $|\alpha + 2| = \alpha + 2$

$2 < \alpha < 8 \Leftrightarrow -2 > -\alpha > -8 \Leftrightarrow 8 > 10 - \alpha > 2$ άρα $|10 - \alpha| = 10 - \alpha$

Οπότε

$B = 5(\alpha - 1) - 3(-\alpha + 9) + 4(\alpha + 2) + 5(10 - \alpha) =$

$= 7\alpha + 26$ και επομένως

$2 < \alpha < 8 \Leftrightarrow 14 < 7\alpha < 56 \Leftrightarrow$

$14 + 26 < 7\alpha + 26 < 56 + 26 \Leftrightarrow 40 < B < 82$

18.

Σ' ένα κλουβί υπάρχουν 20 καναρίνια και 36 κοτσύφια .

Τα τέσσερα πέμπτα των καναρινιών και τα μισά κοτσύφια κελαηδούν .

Εκλέγουμε ένα πουλί στην τύχη .

Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων

i) Είναι καναρίνι

ii) Είναι κοτσύφι και κελαηδεί

iii) Το πουλί κελαηδεί

iv) Είναι καναρίνι ή κελαηδεί

Λύση

Έστω
Α :Το πουλί είναι καναρίνι

Β: Το πουλί είναι κοτσύφι

Γ: Το πουλί κελαηδεί

Επίσης γνωρίζουμε ότι τα καναρίνια που κελαηδάνε είναι $\frac{4}{5}\cdot 20 = 16$ και τα κοτσύφια που κελαηδούν είναι 18 , ενώ το σύνολο των πουλιών είναι 56

Οπότε

i) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = \frac{20}{56}$

ii) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(B \cap \Gamma) = \frac{18}{56}$

iii) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(\Gamma) = \frac{16}{56} + \frac{18}{56} = \frac{34}{56}$

iv) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{20}{56} + \frac{34}{56} - \frac{16}{56} = \frac{38}{56}$$

19.

i) Έστω τα σημεία Α($\lambda^3 - 2$, $|\mu - 2|$) και Β(6 , -2) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ ώστε να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των x΄x .

ii) Για τις τιμές των λ και μ του **(i)** ερωτήματος να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\mu x^2 - 2\lambda x - (\alpha^2 + \beta^2) = 0$, όπου $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$

Λύση

i)

Πρέπει να ισχύουν

$(\lambda^3 - 2 = 6$ και $|\mu - 2| = 2) \Leftrightarrow$

$(\lambda^3 = 8$ και $\mu - 2 = \pm 2) \Leftrightarrow \lambda = 2$ και $\mu = 4$ ή $\mu = 0$

ii)

Αν $\lambda = 2$ και $\mu = 4$ η εξίσωση $\mu x^2 - 2\lambda x - (\alpha^2 + \beta^2) = 0$

γίνεται $4x^2 - 4x - (\alpha^2 + \beta^2) = 0$ με

$\Delta = 16 + 16(\alpha^2 + \beta^2) > 0$ για κάθε $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$

Οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

Αν $\lambda = 2$ και $\mu = 0$ η εξίσωση γίνεται

$-4x - (\alpha^2 + \beta^2) = 0$ η οποία είναι πρώτου βαθμού και έχει την μοναδική λύση

$$x = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$$

20 .

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $(x-1)(x^2-5x+6)(x^2+1)<0$

ii) $\dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{x^2-4x+3}\le 0$

Λύση

i)

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Το πρόσημο του $x-1$ φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Πρόσημο του $x-1$		$-$	0	$+$	

$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

Το πρόσημο του x^2-5x+6 φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Πρόσημο του x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ενώ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+1>0$

Συγκεντρωτικός πίνακας προσήμων

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Πρόσημο του $x-1$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
Πρόσημο του x^2-5x+6		$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	0	$+$	
Πρόσημο του x^2+1		$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
Πρόσημο του γινόμενου		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το πρόσημο του γινόμενου διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν

$x<1$ ή $2<x<3$

ii)

Με $x^2-4x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq 3$ η δοσμένη ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$(x-2)(x^2+x+1)(x^2-4x+3)\le 0$

Δουλεύοντας όπως και στο (i) βρίσκουμε ότι ο συγκεντρωτικός πίνακας προσήμου είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
Πρόσημο του $x-2$	$-$ $\quad$ | $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ | $\quad$ $+$
Πρόσημο του x^2+x+1	$+$ $\quad$ | $\quad$ $+$ $\quad$ | $\quad$ $+$ $\quad$ | $\quad$ $+$
Πρόσημο του x^2-4x+3	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ | $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
Πρόσημο του γινόμενου	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

Από το πρόσημο του γινόμενου και λαμβάνοντας υπ ‘ όψη τους περιορισμούς διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν

$x<1$ ή $2\le x<3$